

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa cấp số nhân (u_n)

Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q . (q gọi là công bội).

$$u_{n+1} = u_n \cdot q$$

Hệ quả: $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. (với $u_n \neq 0$)

Ví dụ.

a) Dãy số (u_n): 1, 2, 4, 8, 16, ... là cấp số nhân với $u_1 = 1, q = 2$.

b) Dãy số (u_n): 81, -27, 9, -3, 1, ... là cấp số nhân với $u_1 = 81, q = -\frac{1}{3}$.

2. Số hạng tổng quát u_n

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q , ta có:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

3. Tính chất ba số hạng liên tiếp của CSN

Cho cấp số nhân (u_n): $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \dots$

$$\text{Ta có: } u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \quad \text{Hay} \quad |u_k| = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}}$$

4. Tổng n số hạng đầu của một CSN

Định lí. Cho CSN (u_n) với $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

$$\text{Ta có: } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

• Chú ý: Nếu công bội $q = 1$ thì CSN là $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$. Khi đó: $S_n = n \cdot u_1$

Ví dụ 1. Viết dạng khai triển của các cấp số nhân sau:

a) CSN (u_n) với $u_1 = 5, q = 2$ có năm số hạng.

Giải.

Dạng khai triển của CSN (u_n) là: 5, 10, 20, 40, 80.

b) CSN (u_n) với $u_1 = -2, q = \frac{1}{2}$ có sáu số hạng.

c) CSN (u_n) với $u_1 = 3, q = -2$ có bảy số hạng.

d) CSN (u_n) với $u_1 = -6, q = -\frac{1}{3}$ có tám số hạng.

Ví dụ 2. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.

a) Tìm u_7, u_{15}, u_{20} .

Giải.

$$u_7 = u_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$$

b) Số 768 là số hạng thứ mấy của CSN?

c) Số 98304 là số hạng thứ bao nhiêu?

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) . Tính công bội q , biết:

a) $u_1 = 3, u_4 = 375$.

Giải.

$$\text{Ta có: } u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow 375 = 3 \cdot q^3 \Leftrightarrow 125 = q^3 \Leftrightarrow q = 5$$

b) $u_1 = -2, u_3 = -18$.

Ví dụ 4. Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau, biết:

a) $\begin{cases} u_2 = -6 \\ u_4 = -54. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q = -6 & (1) \\ u_1 \cdot q^3 = -54 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) chia (1) vế theo vế, ta được: $q^2 = 9 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Với $q = 3$, thế vào (1) ta được $u_1 = -2$

Với $q = -3$, thế vào (1) ta được $u_1 = 2$

Vậy: $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_5 - u_3 = 42 \\ u_4 - u_2 = 21. \end{cases}$

Ví dụ 5.

a) Cho CSN (u_n) với $u_1 = 5, q = 2$. Tính S_9, S_{15}, S_{21} ?

Giải. Ta có $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Suy ra: $S_9 = u_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 5 \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 2555$

b) Cho CSN (u_n) với $u_1 = -2, q = \frac{1}{2}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của CSN?

c) Tính $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

d) Tính $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$.

Bài tập tự luận

1. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q .
 - a) Biết $u_1 = 2, u_6 = 486$. Tìm q .
 - b) Biết $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$. Tìm u_1 .
 - c) Biết $u_1 = 3, q = -2$. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy ?
2. Tìm các số hạng của cấp số nhân (u_n) có năm số hạng, biết:
 - a) $u_3 = 3$ và $u_5 = 27$.
 - b) $u_4 - u_2 = 25$ và $u_3 - u_1 = 50$.
3. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của các cấp số nhân (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384. \end{cases}$	b) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$
c) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6. \end{cases}$	d) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20. \end{cases}$
4. Cho cấp số nhân (u_n) có: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$
 - a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.
 - b) Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069 ?
 - c) Số 12288 là số hạng thứ mấy ?
5.
 - a) Viết bốn số xen giữa các số 5 và 160 để được một cấp số nhân.
 - b) Viết năm số xen giữa các số 1 và 729 để được một cấp số nhân có bảy số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.
 - c) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được một cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu ?
6. Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng năm số hạng sau là -93 .
7.
 - a) Cho cấp số nhân (u_n) , biết : $q = 2, u_n = 96, S_n = 189$. Tính n ?
 - b) Cho cấp số nhân (u_n) , biết : $u_1 = 2, u_n = \frac{1}{8}, S_n = \frac{31}{8}$. Tìm n ?
8. Tỉ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu ?

Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho dãy số $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Dãy số này là cấp số nhân có $u_1 = 1; q = \frac{1}{2}$. **B.** Số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
C. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{2^n}$. **D.** Dãy số này là dãy số giảm.

Câu 2. Cho dãy số $-1, -1, -1, -1, -1, \dots$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A.** Dãy số này không phải là cấp số nhân. **B.** Là cấp số nhân có $u_1 = -1, q = 1$.
C. Số hạng tổng quát $u_n = (-1)^n$. **D.** Là cấp số nhân có $u_1 = -1, q = -1$.

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5; q = -2$. Số hạng thứ sáu của (u_n) là

- A.** $u_6 = -320$. **B.** $u_6 = -160$. **C.** $u_6 = 320$. **D.** $u_6 = 160$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_7 = -32$. Tìm q ?

- A.** $q = \pm 1$. **B.** $q = \pm \frac{1}{2}$. **C.** $q = \pm 2$. **D.** $q = \pm 4$.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 4; q = -4$. Viết số hạng tổng quát u_n ?

- A.** $u_n = 4(-4)^n$. **B.** $u_n = (-4)^{n-1}$. **C.** $u_n = 4(-4)^{n-1}$. **D.** $u_n = 4^n$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

- A.** Số hạng thứ 6. **B.** Số hạng thứ 7.
C. Số hạng thứ 8. **D.** Không phải là một số hạng của (u_n) .

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5; q = -2$. Tính S_6 ?

- A.** $S_6 = -\frac{155}{3}$. **B.** $S_6 = -\frac{315}{3}$. **C.** $S_6 = -315$. **D.** $S_6 = 315$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3; u_2 = -6$. Số 192 là số hạng thứ mấy của (u_n) ?

- A.** Số hạng thứ 7. **B.** Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 5. **D.** Không phải là một số hạng của (u_n) .

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}; u_5 = 16$. Tìm u_1 và q .

- A.** $u_1 = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}$. **B.** $u_1 = -\frac{1}{2}; q = -\frac{1}{2}$. **C.** $u_1 = \frac{1}{16}; q = 4$. **D.** $u_1 = -\frac{1}{16}; q = -4$.

Câu 10. Một cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3; q = 2; S_n = 765$. Tìm n .

- A.** $n = 6$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 9$.